

0.

Végtelen sok végtelen?

Dr. Sáfár Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Szombathely, 2021.05.04.

0.

Elérhetőségek

“C” épület I. emelet 105-ös szoba

safar.zoltan@sek.elte.hu

safarz.web.elte.hu

1. Halmazok elemszáma

Véges halmazok

Legyen

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

halmaz.

1. Halmazok elemszáma

Véges halmazok

Legyen

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

halmaz.

Ekkor az A halmaznak 3 eleme van, vagyis $|A| = 3$.

1. Halmazok elemszáma

Véges halmazok

Legyen

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

halmaz.

Ekkor az A halmaznak 3 eleme van, vagyis $|A| = 3$.

Ha $|B| = 3$, akkor a B halmaznak is 3 eleme van, legyen pl.

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

1. Halmazok elemszáma

Véges halmazok

Legyen

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

halmaz.

Ekkor az A halmaznak 3 eleme van, vagyis $|A| = 3$.

Ha $|B| = 3$, akkor a B halmaznak is 3 eleme van, legyen pl.

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

Most $|A| = |B|$, ezért az két halmaz elemeit párba tudjuk állítani:

1. Halmazok elemszáma

Véges halmazok

Legyen

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

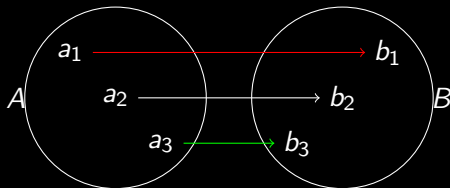
halmaz.

Ekkor az A halmaznak 3 eleme van, vagyis $|A| = 3$.

Ha $|B| = 3$, akkor a B halmaznak is 3 eleme van, legyen pl.

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

Most $|A| = |B|$, ezért az két halmaz elemeit párba tudjuk állítani:



2. Számosságok

Végtelen halmazok

Az

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}$$

számhalmazok nem végesek.

2. Számosságok

Végtelen halmazok

Az

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}$$

számhalmazok nem végesek.

$$|\mathbb{N}| = ?, \quad |\mathbb{Z}| = ? \quad |\mathbb{Q}| = ? \quad |\mathbb{R}| = ? \quad |\mathbb{C}| = ?$$

2. Számosságok

Végtelen halmazok

Az

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}$$

számhalmazok nem végesek.

$$|\mathbb{N}| =?, \quad |\mathbb{Z}| =? \quad |\mathbb{Q}| =? \quad |\mathbb{R}| =? \quad |\mathbb{C}| =?$$

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{Z}| < |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| < |\mathbb{C}|? \quad |(0, 1)| < |(0, 2)|?$$

2. Számosságok

Végtelen halmazok

Az

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}$$

számhalmazok nem végesek.

$$|\mathbb{N}| = ?, \quad |\mathbb{Z}| = ? \quad |\mathbb{Q}| = ? \quad |\mathbb{R}| = ? \quad |\mathbb{C}| = ?$$

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{Z}| < |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| < |\mathbb{C}|? \quad |(0, 1)| < |(0, 2)|?$$

Definíció 2.1

Megszámlálhatóan végtelen számosság

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

Megjegyzés. Egy A halmaz megszámlálható, ha az elemei sorozatba rendezhetők (felsorolhatók).

2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

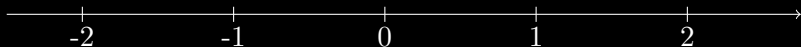
Megjegyzés. Egy A halmaz megszámlálható, ha az elemei sorozatba rendezhetők (felsorolhatók).



2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

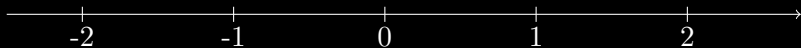
Megjegyzés. Egy A halmaz megszámlálható, ha az elemei sorozatba rendezhetők (felsorolhatók).



2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

Megjegyzés. Egy A halmaz megszámlálható, ha az elemei sorozatba rendezhetők (felsorolhatók).

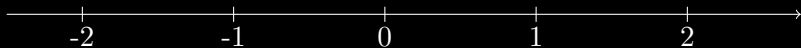


$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

Megjegyzés. Egy A halmaz megszámlálható, ha az elemei sorozatba rendezhetők (felsorolhatók).



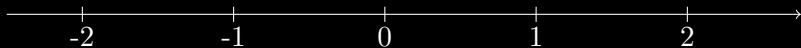
$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

A 27-es szám hányadik helyen áll?

2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

Megjegyzés. Egy A halmaz megszámlálható, ha az elemei sorozatba rendezhetők (felsorolhatók).



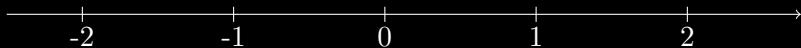
$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

A 27-es szám hányadik helyen áll? Melyik szám van a 27. pozícióban?

2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

Megjegyzés. Egy A halmaz megszámlálható, ha az elemei sorozatba rendezhetők (felsorolhatók).



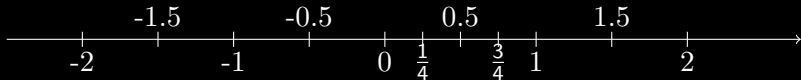
$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} \quad \text{ezért} \quad |\mathbb{Z}| = \aleph_0.$$

A 27-es szám hányadik helyen áll? Melyik szám van a 27. pozícióban?

2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

Megjegyzés. Egy A halmaz megszámlálható, ha az elemei sorozatba rendezhetők (felsorolhatók).



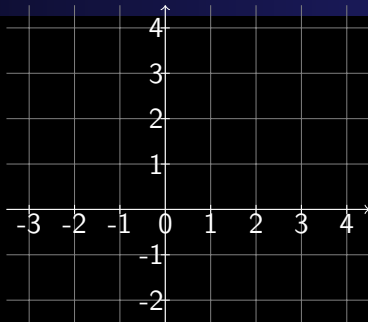
$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} \quad \text{ezért} \quad |\mathbb{Z}| = \aleph_0.$$

A 27-es szám hányadik helyen áll? Melyik szám van a 27. pozícióban?

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, \text{Inko}(p, q) = 1 \right\}$$

2. Számosságok

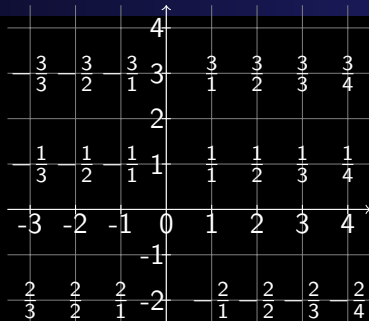
Megszámlálható halmazok



2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

Az összes racionális számot felsorolhatjuk a rácspontokban:

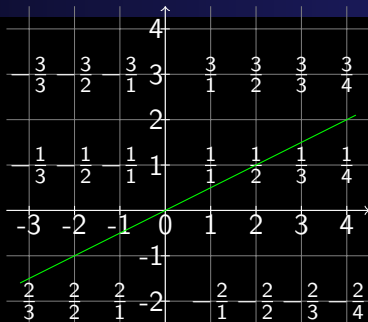


2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

Az összes racionális számot felsorolhatjuk
a rácspontokban:

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots$$

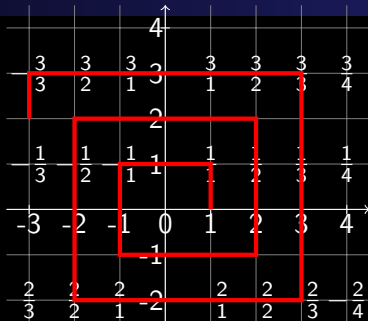


2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

Az összes racionális számot felsorolhatjuk a rácspontokban:

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots$$



2. Számosságok

Megszámlálható halmazok

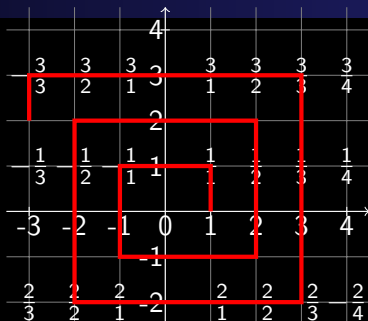
Az összes racionális számot felsorolhatjuk

a rácspontokban:

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots$$

Tehát $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$,

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|.$$



2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok

A $(0, 1)$ nem megszámlálható:

2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok

A $(0, 1)$ nem megszámlálható:

Indirekt tfh. megszámlálható, ekkor az elemei felsorolhatóak:

$$a_1 = 0,342765243762$$

$$a_2 = 0,987564566545$$

$$a_3 = 0,456872345618$$

...

2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok

A $(0, 1)$ nem megszámlálható:

Indirekt tfh. megszámlálható, ekkor az elemei felsorolhatóak:

$$a_1 = 0,342765243762$$

$$a_2 = 0,987564566545$$

$$a_3 = 0,456872345618$$

...

Ha $a_{n,n} = 8$, akkor $b_n = 9$, egyébként $b_n = 8$:

2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok

A $(0, 1)$ nem megszámlálható:

Indirekt tfh. megszámlálható, ekkor az elemei felsorolhatóak:

$$a_1 = 0,342765243762$$

$$a_2 = 0,987564566545$$

$$a_3 = 0,456872345618$$

...

Ha $a_{n,n} = 8$, akkor $b_n = 9$, egyébként $b_n = 8$:

$$b = 0,898\dots$$

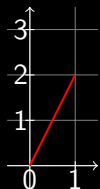
2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok

$$|(0, 1)| = |(0, 2)|$$

2. Számosságok

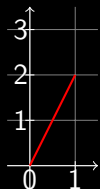
Nem megszámlálható halmazok



$$|(0, 1)| = |(0, 2)| \quad (f : x \mapsto 2x)$$

2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok

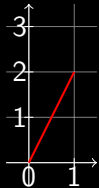


$$|(0, 1)| = |(0, 2)| \quad (f : x \mapsto 2x)$$

$$|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$$

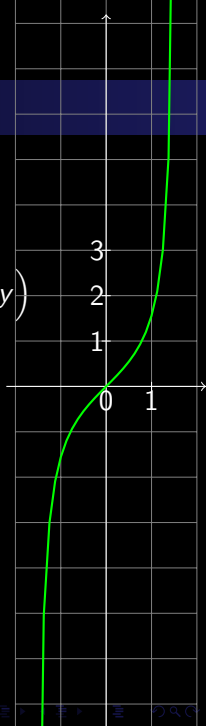
2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok



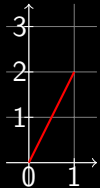
$$|(0, 1)| = |(0, 2)| \quad (f : x \mapsto 2x)$$

$$|(0, 1)| = |\mathbb{R}| \quad \left(g : x \mapsto \pi x - \frac{\pi}{2}, \quad h : y \mapsto \operatorname{tg} y \right)$$



2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok



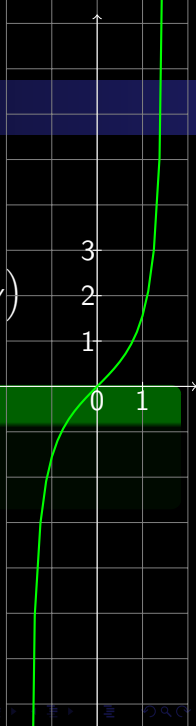
$$|(0, 1)| = |(0, 2)| \quad (f : x \mapsto 2x)$$

$$|(0, 1)| = |\mathbb{R}| \quad \left(g : x \mapsto \pi x - \frac{\pi}{2}, \quad h : y \mapsto \operatorname{tg} y \right)$$

Definíció 2.2

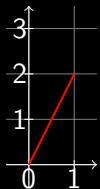
Kontinuum számosság

$$|\mathbb{R}| = c$$



2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok



$$|(0, 1)| = |(0, 2)| \quad (f : x \mapsto 2x)$$

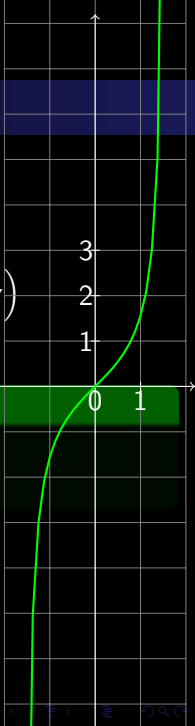
$$|(0, 1)| = |\mathbb{R}| \quad \left(g : x \mapsto \pi x - \frac{\pi}{2}, \quad h : y \mapsto \operatorname{tg} y \right)$$

Definíció 2.2

Kontinuum számosság

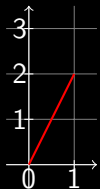
$$|\mathbb{R}| = c$$

Végül $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$:



2. Számosságok

Nem megszámlálható halmazok



$$|(0, 1)| = |(0, 2)| \quad (f : x \mapsto 2x)$$

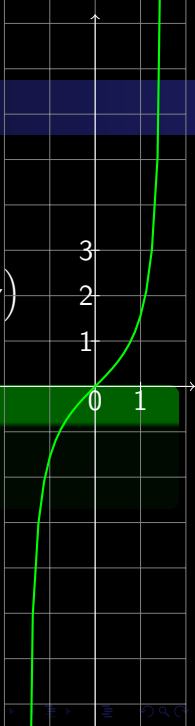
$$|(0, 1)| = |\mathbb{R}| \quad \left(g : x \mapsto \pi x - \frac{\pi}{2}, \quad h : y \mapsto \operatorname{tg} y \right)$$

Definíció 2.2

Kontinuum számosság

$$|\mathbb{R}| = c$$

Végül $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$: A sík számossága c ,
és ezért \mathbb{C} számossága is c .



2. Számosságok

Gondolkodtató feladatok

Képzeljünk el egy szállodát, amelynek (megszámlálhatóan) végtelen sok szobája van, de már mind foglalt.

2. Számosságok

Gondolkodtató feladatok

Képzeljünk el egy szállodát, amelynek (megszámlálhatóan) végtelen sok szobája van, de már mind foglalt.

- 1** Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?

2. Számosságok

Gondolkodtató feladatok

Képzeljünk el egy szállodát, amelynek (megszámlálhatóan) végtelen sok szobája van, de már mind foglalt.

- 1** Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
- 2** Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehet őket elszállásolni?

2. Számosságok

Gondolkodtató feladatok

Képzeljünk el egy szállodát, amelynek (megszámlálhatóan) végtelen sok szobája van, de már mind foglalt.

- 1** Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
- 2** Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehet őket elszállásolni?
- 3** A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

2. Számosságok

Gondolkodtató feladatok

Képzeljünk el egy szállodát, amelynek (megszámlálhatóan) végtelen sok szobája van, de már mind foglalt.

- 1** Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
- 2** Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehet őket elszállásolni?
- 3** A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?
- 4** A szomszédos városban végtelen sok végtelen szálloda van. Sajnos mind kigyulladt... Mit tegyen most a portás?

2. Számosságok

Köszönöm a figyelmet!